10/12/2020

Σχόλιο για το ότι ο Evans αναφέρει ως εξίσωση θερμότητας την $\partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = 0$

[Εάν $u(x,t) = v(x)$, τότε η εξ. θερμότητα γίνεται $-\Delta v(x) = 0$]

και όχι την $\partial_t \tilde{u}(x,t) - \kappa \Delta \tilde{u}(x,t) = 0$, $\kappa > 0$ σταθερά. Κάνοντας κατάλληλο scaling (κλιμάκωση, δηλ. εισάγοντας μια νέα κλίμακα [μέτρησης μεταβλητών]) μπορούμε να φέρουμε την δεύτερη εξ. στην μορφή της πρώτης:

Έστω $\underbrace{u(x,t)}_{=u_\lambda} := \tilde{u}(x, \underbrace{\lambda t}_{=\tau})$, $\lambda > 0$.

Τότε: $\Delta u(x,t) = \Delta \tilde{u}(x, \lambda t)$ και $\partial_t u(x,t) = (\partial_\tau \tilde{u})(x,t) \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t}$

$= (\partial_\tau \tilde{u})(x,t) \cdot \lambda$

Άρα: $\partial_t u(x,t) = \lambda \cdot \partial_\tau \tilde{u}(x,t)$, $\Delta u(x,t) = \Delta \tilde{u}(x,\tau)$

και άρα η $\boxed{\partial_\tau \tilde{u}(x,t) - \kappa \cdot \Delta \tilde{u}(x,t) = 0}$

$\iff \frac{1}{\lambda} \partial_t u(x,t) - \kappa \Delta u(x,t) = 0$

$u(x,t) = \tilde{u}(x, \frac{t}{\kappa})$

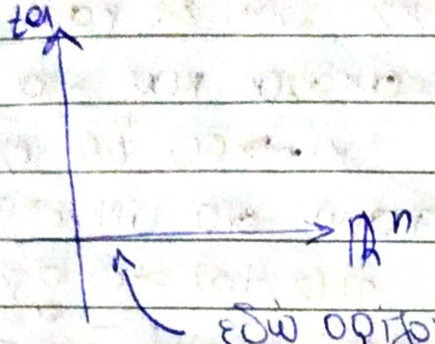
$\underset{\lambda = \frac{1}{\kappa} > 0}{\iff} \boxed{\partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = 0}$

Θεώρημα (επίλυση εξ. θερμότητας για ΠΑΤ στον $\mathbb{R}^n$):
$g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\Phi(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$

Τότε η $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) g(y)\, dy$

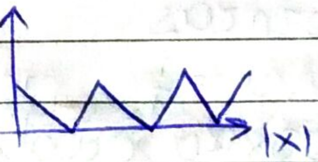
$[= (\Phi(\cdot,t) * g)(x)]$ επιλύει το ΠΑΤ $\begin{cases} u_t - \Delta u & \text{στο } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(\cdot,0) = g \end{cases}$

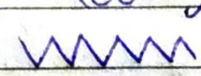
με $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$.



1. <u>Παρατήρηση</u>: Την χρονική στιγμή $t=0$ η $u(\cdot,0)$ είναι γενικώς μόνο συνεχής:

π.χ. $u(x,0) = \tilde{u}(|x|,0)$

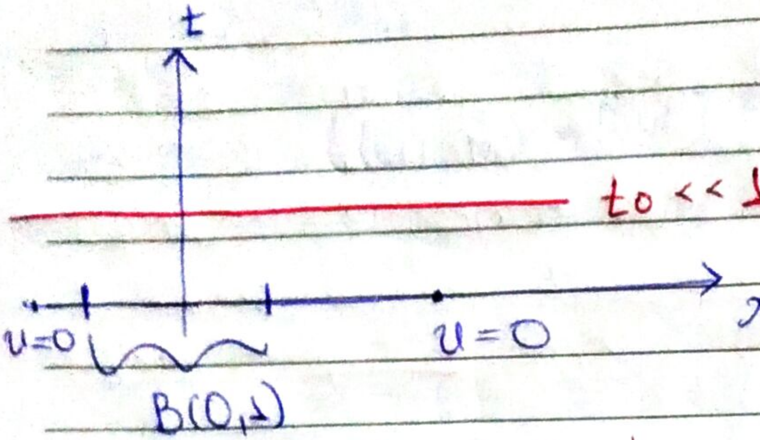
$=$ 

ενώ <u>αμέσως</u> μετά είναι απείρως λεία. αυτό είναι χαρακτηριστικό της εξ. θερμ. και λέμε ότι λειαίνει τα αρχικά δεδομένα [σε αντιδιαστολή είδαμε ότι η εξ. μεταφοράς απλώς τα μεταφέρει, δηλ. αν έχουμε μια V αρχικά τότε αυτή θα μεταφερθεί στον χώρο με την εξέλιξη του χρόνου]: αν έχουμε αρχικά δεδομένα π.χ.  τότε για $t \to 0$ αναμένουμε κάτι πιο λείο π.χ. 

2. <u>Παρατήρηση</u>: Άπειρη ταχύτητα μετάδοσης. Έστω $g \geq 0$, $g \neq 0$, π.χ. $g(x) = \eta(x)$, ο συνήθης εκλειαντής, δηλ. έστω $\operatorname{supp} g = \overline{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^n$. Τότε

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n}}_{\text{εδώ: } \overline{B}(0,1)} \underbrace{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}_{>0} \underbrace{g(y)\,dy}_{>0 \text{ στο } B(0,1)} > 0$$

$\Longrightarrow u(x,t) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t$, ενώ $u(x,0) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ με $|x| \geq 0$.



$t_0 << 1$ παντού, δηλ. σε κάθε $x\in\mathbb{R}^n$ ακόμα και για $|x|\to\infty$ θα έχουμε πάνω στο υπερεπίπεδο (σχήμα = ευθεία) $t=t_0$ τιμές $u(x,t_0)>0$!!! και μάλιστα σε άπειρα μικρό χρονικό διάστημα $t_0<<1$ («σε χρόνο dt»)

Επίλυση του ΠΑΤ της μη ομογενούς εξ. θερμότητας

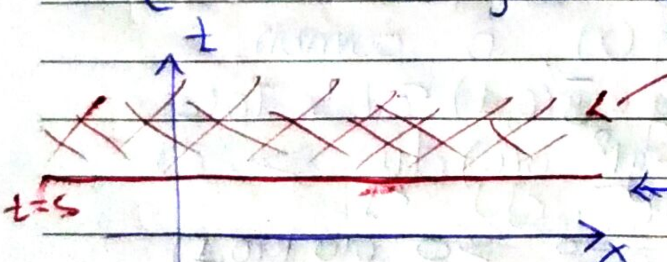
$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f, & \text{στο } \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ u=0, & \text{στο } \mathbb{R}^n\times\{t=0\} \end{cases}$$

Πρώτα για αρχικά δεδομένα $\equiv 0$:

Χρησιμοποιούμε την αρχή του Duhamel:

Η λύση του ΠΑΤ αυτού δίνεται ως $u(x,t)=\int_0^t u(x,t;s)\,ds$, όπου $u(\cdot\,;s)$ είναι λύση του ομογενούς ΠΑΤ

$$\begin{cases} \partial_t u(\cdot\,;s) - \Delta u(\cdot\,;s)=0, & \text{στο } \mathbb{R}^n\times(s,\infty) \\ u(\cdot\,;s) = f(\cdot\,;s), & \text{στο } \mathbb{R}^n\times\{t=s\} \end{cases}$$



εδώ βρίσκω το $u(\cdot\,;s)$ με $u(\cdot\,;s)=f(\cdot\,;s)$, για $t=s$.

εδώ δίνεται η f και εδώ θέλω να βρω ποιο είναι το u [με $u=0$ στο $t=0$]

Το u προκύπτει ως ολοκλήρωμα ως προς s πάνω από τα $u(\cdot\,;s)$

Για να καταλάβουμε γιατί να ισχύει η αρχή του Duhamel ας το δούμε όσο πιο απλά γίνεται:

$$\partial_t u(x,t) = \partial_t \left(\int_0^t u(x,t;s)\,ds \right)$$

$$= \underbrace{u(x,t;t)}_{=f(x,t)} + \int_0^t \partial_t u(x,t;s)\,ds$$

και $\Delta u(x,t) = \Delta \int_0^t u(x,t;s)\,ds$

$$= \int_0^t \Delta u(x,t;s)\,ds$$

$$\Longrightarrow (\partial_t - \Delta)\cdot u(x,t) = f(x,t) + \int_0^t \underbrace{(\partial_t - \Delta)u(x,t;s)ds}_{=0\text{, για } t>s}.$$

[αυτό φυσικά θέλει αυστηρή μαθηματική δικαιολόγηση (justification)].

Για το αντίστοιχο θεώρημα βλ. Evans Th. 2 p. 50 και για γενικά αρχικά δεδομένα $u(\cdot,0)=g$ στο $\mathbb{R}^n$, βλ. Evans, (17), p. 51 (γίνεται πρόσθεση του ομογενούς προβλήματος με αρχικά δεδομένα g με την λύση του μη ομογενούς με αρχικά δεδομένα $=0$)

$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f \\ u(\cdot,0)=g \end{cases}$ Τότε $u = u_1 + u_2$, όπου $\begin{cases} \partial_t u_1 - \Delta u_1 = f \\ u_1(\cdot,0)=0 \end{cases}$ και

$\begin{cases} \partial_t u_2 - \Delta u_2 = f \\ u_2(\cdot,0)=g \end{cases}$ (αυτό προφανώς οφείλεται στην γραμμικότητα της εξ. θερμ. δηλ. στην γραμμ. του τελεστή $\partial_t - \Delta u$)

Για την εξ. θερμότητας σε αναλογία με την εξ. Laplace - ισχύει μια ιδιότητα μέσης τιμής, με χρήση της οποίας αποδεικνύονται καταρχάς μια ασθενής και μια ισχυρή αρχή μεγίστου (για την εξ. θερμ.)

Ασθενής αρχή μεγίστου (για εξ. θερμ.)

(i) Έστω $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U_T})$

με $(\partial_t - \Delta)u = 0$ στο U_T

Τότε $\max\limits_{U_T} u = \max\limits_{\Gamma_T} u$, όπου $\Gamma_T := \overline{U_T} \setminus U_T$

Ισχυρή αρχή μεγίστου (για εξ. θερμ.):

(ii) Αν επιπλέον $U \subset \mathbb{R}^n$ συνεκτικό και $\exists (x_0, t_0) \in U_T$: $u(x_0, t_0) = \max\limits_{U_T} u$, τότε $u = u(x_0, t_0)$ στο $\overline{U}_{t_0}$

Εδώ χρησιμοποιούμε τους εξής συμβολισμούς:

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Τότε ορίζουμε τον παραβολικό κύλινδρο $U_T := U \times (0, T]$, $T > 0$

[και όχι $= U \times (0, T)$: το παρόν του U_T ανήκει στο U_T]

με το παραβολικό σύνορο $\Gamma_T := \overline{U_T} \setminus U_T$

Επίσης, (βλ. Appendix, Evans) συμβολίζουμε

$u \in C_1^2(U_T) = \{ u : U_T \to \mathbb{R} : u, D_x u, D_x^2 u, u_t \in C(U_T) \}$

(ουσιαστικά: η u η ίδια, η χρονική της μερική παράγωγος u_t και όλες οι χωρικές μερ. παρ. μέχρι και 2ης τάξης ∃ και είναι συνεχείς συναρτήσεις του (x,t)).

Ερμηνεία ισχυρής αρχής μεγίστου: Εάν η u λαμβάνει την μέγιστη τιμή σε ένα $(x_0, t_0) \in U_T$ τότε η u είναι σταθερή $\forall x_0 \in U$ $\forall\ 0 \leq t \leq t_0$, εάν τα αρχικά και συνοριακά δεδομένα μέχρι $t = t_0$ είναι σταθερά. Η λύση μπορεί να αλλάξει αν τα συνοριακά δεδ. αλλάζουν για $t > t_0$, αλλά η u δεν θα «νιώθει» τις αλλαγές αυτές μέχρι τον χρόνο t_0. (διαισθητικά προφανές).

Πόρισμα: Άπειρη ταχ. μετάδοσης (βλ. Evans p.57).

Πόρισμα: Μοναδικότητα λύσεων ΠΑΣΤ εξ. θερμ. για φραγμένα $U \subset \mathbb{R}^n$: Άσκηση. (Evans Th.5 p.57)